11. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:

a) Bestimme die Nullstellen der Funktion $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.
(Hinweis: $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.)

b) Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \sin \frac{1}{z}$.
Zeige: Die Menge der Nullstellen von f hat einen Häufungspunkt. Warum widerspricht dies nicht dem Identitätssatz?

Aufgabe 2:
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von $f,\ k \in \mathbb{N}$.

a) Zeige: Falls $k = 1$, so gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U,\ z_0 \in U_0$, und ein $\varepsilon > 0$, so dass alle $w \in B_\varepsilon(0)$ genau ein Urbild in U_0 haben.

b) Zeige: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U,\ z_0 \in U_0$, so dass gilt: Für $w \in \mathbb{C}$ mit $0 < |w| < \varepsilon$ hat $f^{-1}(w) \cap U_0$ genau k Elemente, d.h. jedes w in der Nähe von 0 hat genau k Urbilder in der Nähe von z_0.

Aufgabe 3:
Bestimme $\displaystyle\int_{K_2(1)} \frac{\sin z}{z^4} dz$, wobei $K_2(1)$ der Kreis um 1 mit Radius 2 mit der positiven Orientierung ist.

Hinweis: Versuche **nicht**, das Integral direkt zu berechnen.

Aufgabe 4:
Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Falls es $R, C > 0$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt: $|f(z)| \leq C|z|^n$, dann ist f ein Polynom vom *Grad* $\leq n$.

Hinweis: Imitiere den Beweis des Satzes von Liouville.