12. Hausaufgabe zur Vorlesung Analysis III

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0,1,2\} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$.

Bestimme die Laurentreihenentwicklung um $z_0 = 0$ von f auf den folgenden Ringgebieten:

a) $A_0^1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$
b) $A_1^2(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$
c) $A_2^\infty(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z|\}$

Hinweis: Zerlege zunächst f mittels Partialbruchzerlegung und verwende dann die Formel für die geometrische Reihe.

Aufgabe 2:
Bestimme für die folgenden Funktionen $f_k : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, ob sie in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität, einen Pol oder eine wesentliche Singularität haben.

- Ist 0 hebbar, so gebe man die Erweiterung $\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ an.
- Ist 0 ein Pol, so bestimme man seine Ordnung und den Hauptteil der Laurentreihe.
- Ist 0 wesentlich, so gebe man für $\varepsilon > 0$ das Bild $f(A_0^\varepsilon(0))$ an.

a) $f_1(z) = \frac{1}{1-e^z}$, b) $f_2(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$, c) $f_4(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Aufgabe 3:
Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein **Biholomorphismus**, d.h. f ist holomorph, bijektiv und $f^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist ebenfalls holomorph.

a) Zeige: Die Funktion $f(\frac{1}{z})$ hat keine wesentliche Singularität in $z_0 = 0$. (**Hinweis:** Casaroti-Weierstraß)

b) Zeige: f ist ein Polynom.

c) Zeige: $f' : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ hat keine Nullstelle.

d) Bestimme alle Biholomorphismen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.