Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 27. Oktober 2005

Analysis III für Lehramt Gymnasium

2. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 4. November 2005, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

Berechnen Sie bezüglich der euklidischen Norm den Abstand des Punktes $(1,1,1)$ zur Sphäre $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| = 1\}$ mit Hilfe

a) einer geometrischen Betrachtung,

b) der Lagrange-Multiplikatoren.

Aufgabe 2

Zeigen Sie für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x^2+y^2+z^2=1$ und $x,y,z \geq 0$:

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} \leq \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \leq \frac{1}{3}$$

Aufgabe 3

Gegeben seien $f(x,y,z) = xyz$ und die Menge

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=5,\ xy+xz+yz=8\}.$$

a) Zeigen Sie, dass f auf K Minimum und Maximum besitzt.

b) Berechnen Sie alle Punkte in K, in denen f Minimum bzw. Maximum annimmt.

Hinweis zu a): Es gilt $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$.

Aufgabe 4

Es seien $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2\pi\}$ und $f : D \to \mathbb{R}^2$ mit:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y \\ \cosh x \sin y \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Punkte aus D, in denen f lokal umkehrbar ist.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f\left(0, \frac{\pi}{6}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)^T$.