Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 10. November 2005

Analysis III für Lehramt Gymnasium

4. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis **Donnerstag, 17. November 2005, 10.00 Uhr,** in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

Der Weg $x(t)$, den ein durch die Luft (oder ein anderes Gas oder eine Flüssigkeit) fallender Körper der Masse m zurücklegt, genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{\varrho}{m}\dot{x} + g,$$

wobei $\varrho > 0$ den Reibungskoeffizienten und g die Erdbeschleunigung bezeichne. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung unter der Voraussetzung, dass sich der Körper zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhelage in Höhe $x(0) = \frac{gm^2}{\varrho^2}$ befindet.

Aufgabe 2

Die Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ lässt sich mit Hilfe der Transformation $\dot{x}(t) = y(x(t))$ in eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form $y' = g(x, y)$ überführen. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} = x\dot{x} + 2\dot{x}^2,\ x(0) = \frac{1}{2},\ \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3

Es seien f_1, f_2 in $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $|f_j'(x)| \leq k < 1$ für $x \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2)$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $|f_j(x) - f_j(y)| \leq k|x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und $j = 1, 2$.

b) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$. Überführen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + f_1(y) &= a \\ y + f_2(x) &= b \end{aligned}$$

in ein Fixpunktproblem und zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung existiert.

Aufgabe 4

Prüfen Sie für folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob die Lipschitzbedingung bzw. die lokale Lipschitzbedingung erfüllt sind:

a) $f(t, x) = t + xt + x^2$

b) $f(t, x) = t + \sqrt[3]{x^2}$

c) $f(t, x) = \arctan x$

Berechnen Sie mit der Funktion in a) ausgehend von $\varphi_0 \equiv 1$ die nächsten beiden Picard-Iterierten für das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t, x),\ x(0) = 1$.