Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 17. November 2005

Analysis III für Lehramt Gymnasium

5. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 25. November 2005, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1 *Potenzreihenansatz*

Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{x} = x + tx^2,\ x(0) = 2$.

a) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten der Lösung $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ die Rekursionsformel

$$(n+1)a_{n+1} = a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j a_{n-j-1}$$

erfüllen, indem Sie obigen Potenzreihenansatz in der Differentialgleichung auswerten und einen Koeffizientenvergleich durchführen. Finden Sie ein $B > 0$, so dass $0 < a_n \leq 2B^n$ gilt, und eine Abschätzung für den Konvergenzradius der Reihe.

b) Bestimmen Sie (klassisch) die Lösung des Anfangswertproblems. Existiert sie in $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2 *Zeilensummennorm*

Es sei $T \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ und $A = (a_{ij}) \in M(m,n)$ die repräsentierende Matrix von T. Zeigen Sie, dass die l_∞-Norm von T durch die Zeilensummennorm von A gegeben ist:

$$\|T\|_{L(l_\infty^n, l_\infty^m)} = \max_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + 3y(t) + 3e^t \\ \dot{y}(t) &= x(t) + y(t) + 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen A jeweils ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \\ 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die maximale Lösung einiger Anfangswertprobleme vom 3. Übungsblatt. (In den Aufgaben 1, 3 und 4 sei die Anfangsbedingung $x(\tau) = \xi$.)