Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 24. November 2005

Analysis III für Lehramt Gymnasium

6. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 2. Dezember 2005, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ für $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen

a) $x^{(3)} - 2\ddot{x} - 3\dot{x} + 10x = 17e^{-2t} + 10t + 2$ b) $t^2\ddot{x} - 5t\dot{x} + 10x = 2t^3 + 5t$

und den Ansatz für eine inhomogene Lösung von $x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = -8(1+t)\sin t$.

Aufgabe 3

a) Sind die folgenden Mengen abzählbar?

1) Die Menge A aller endlichen Folgen mit Einträgen 0 und 1, d.h.

$$A := \{(a_k) : \{1, ..., n\} \to \{0,1\} \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

2) Die Menge aller Folgen $(a_k) : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mit Einträgen 0 und 1.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und das Intervall $]-1,1[$ gleichmächtig sind.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Nullmengen im $\mathbb{R}^2$ sind:

a) Graph einer stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Betrachten Sie Ober-/Untersummen.)

b) Sierpinski-Dreieck, das ist der Durchschnitt von folgenden Mengen S_n, $n = 1, ..., \infty$:
Gegeben sei ein beliebiges (kompaktes) gleichseitiges Dreieck S_0.
1.) S_0 werde in vier kongruente (d.h. deckungsgleiche) gleichseitige Dreiecke zerlegt. Das (offene) mittlere werde aus S_0 entfernt wird, der Rest sei mit S_1 bezeichnet.
n.) Der Vorgang aus 1.) werde für alle in der Menge S_{n-1} befindlichen Dreiecke durchgeführt, der Rest sei mit S_n bezeichnet.

Hinweis: In b) ist es sinnvoll, folgende Aussage für eine Teilmenge N des $\mathbb{R}^2$ zu zeigen. Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge (Δ_k) von Dreiecken mit

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon,$$

so ist N eine Nullmenge.