Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 1. Dezember 2005

Analysis III für Lehramt Gymnasium

7. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 9. Dezember 2005, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

a) Es sei $\{q_n\}$ eine Abzählung von $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ und für jedes n sei Q_n ein Quadrat mit $q_n \in Q_n$ und dem Lebesque-Mass $\lambda(Q_n) = 2^{-n-1}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := [0,1]^2 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$$

keine inneren Punkte besitzt und, dass $\lambda(M) \geq \frac{1}{2}$ gilt.

b) Gilt für offene Mengen $D \subset X$ im allgemeinen $\lambda(\overline{D}) = \lambda(D)$?

Aufgabe 2

Berechnen Sie im Falle der Existenz den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-1,1]} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx$$

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie das Lebesque-Integral $\displaystyle\int\limits_{(0,\infty)} \frac{1}{1+e^{3x}}\,dx$.

b) Es sei $f(x) := \dfrac{x^\alpha}{1+x^\beta}$. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $f \in \mathcal{L}_1(1,\infty)$?

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Parameterintegrale:

a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{ye^y}\,dy \quad (x > -1)$

b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\arctan(xy)}{y(1+y^2)}\,dy \quad (x \geq 0)$

Hinweis: Es gilt für $x \neq 1$: $\dfrac{1}{(1+y^2)(1+x^2y^2)} = \dfrac{x}{x^2-1}\,\dfrac{x}{1+x^2y^2} - \dfrac{1}{x^2-1}\,\dfrac{1}{1+y^2}$