Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 8. Dezember 2005

Analysis III für Lehramt Gymnasium

8. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 16. Dezember 2005, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

a) Sind folgende Funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ integrierbar über $A \subset \mathbb{R}^2$, d.h. $f \in \mathcal{L}_1(A)$?

1) $f(x,y) = e^{-xy} \sin y,\ A = [0,\infty)^2$

2) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y},\ A = (0,1]^2$

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 y^2 \sin \frac{\pi x}{y}\, dy\, dx$.

Aufgabe 2

a) Gegeben sei eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und eine Funktion $b : A \to [0,\infty]$. Zeigen Sie, dass die n-te Komponente S_{x_n} des Schwerpunkts der Menge

$$B = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in A, -b(x) < x_n < b(x)\}$$

verschwindet.

b) Es seien $a > 0$ und P die Pyramide mit Grundfläche $[-a,a]^2$ und Spitze in $(0,0,7)$. Berechnen Sie den Schwerpunkt von P.

Hinweis: Fehlt eine Spezifikation des Schwerpunkts, so ist $\rho \equiv 1$ zugrunde gelegt.

Aufgabe 3

Es sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le 4 - x^2\}$ die Grundfläche des Körpers K, dessen Schnitt mit der Ebene $E_{x_0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0\}$ für jedes x_0 ein gleichseitiges Dreieck bildet. Berechnen Sie das Volumen von K.

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Trägheitsmoment von K bzgl. der z-Achse, d.h. $\displaystyle\int_K \left(x^2 + y^2\right) d^3(x,y,z)$.

a) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$

b) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le r^2, 0 \le z \le h\}$