UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 15. Dezember 2005

Analysis III für Lehramt Gymnasium

9. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 6. Januar 2006, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

Es sei $a > 0$. Die *Lemniskate* $L \subset \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller Punkte, für die das Produkt der Abstände von den Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ den Wert a^2 besitzt.

a) Skizzieren Sie L und zeigen Sie $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\}$.

b) Beschreiben Sie das Innere der rechten *Schlaufe* von L durch Polarkoordinaten.

c) Welchen Flächeninhalt schließt diese Schlaufe ein?

Hinweis zu b): Man erhält $|\varphi| < \frac{\pi}{4}$ und $0 < r < a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob folgende Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ein Potential besitzen, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches.

a) $u(x, y) = (1 + \cos y e^{x \cos y}, 1 + \sin y e^{x \cos y})^T$

b) $v(x, y, z) = (y^2 + 2xz, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz)^T$

Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen $f(x, y) = (-y, x)^T$ und $g(x, y) = \left(xe^{x^2+y^2}, ye^{x^2+y^2}\right)^T$. Bestimmen sie jeweils das Wegintegral von f bzw. g über folgende Wege γ:

a) $\gamma(t) = (t^\alpha, t^\beta)^T, \quad 0 \le t \le 1,\ \alpha, \beta > 0$

b) $\gamma(t) = (\sin t, 1 - \cos t)^T, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 4

Gegeben seien ein Weg $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a, b], \mathbb{R}^n)$ und ein Vektorfeld $v \in \mathcal{C}((\gamma), \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$\left| \int_\gamma \langle v(x), dx\rangle \right| \le \sup\{|v(x)| : x \in (\gamma)\} \cdot L(\gamma)$$

Aufgabe 5 *Wiederholungsaufgabe*

a) Es seien $a, b, c \neq 0$. Berechnen Sie den Schwerpunkt der folgenden Menge:

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1,\ x,y,z \geq 0\}$$

b) Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts $Z_1 \cap Z_2$ der beiden Zylinder

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Hinweis: Wie sieht in b) der Schnitt von $Z_1 \cap Z_2$ mit $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0\}$ aus?

Aufgabe 6 *Wiederholungsaufgabe*

Gegeben seien Funktionen $f_j \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, ..., x_n) := \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j)$.

Zeigen Sie $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_j.$$

Wir wünschen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr
Gaußklammer des Flächeninhalts der rechten Lemniskatenschlaufe mit $a = 44,79$**!**