

Analysis III für Lehramt Gymnasium

10. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 13. Januar 2006, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

Berechnen Sie mit dem Integralsatz von Gauß die folgenden Integrale:

a) $\int_{\partial G} \langle v, \mathbf{n}_a \rangle ds$ mit $v(x, y) = \begin{pmatrix} xe^y + x^4y^2 \\ -e^y + x^3y^3 \end{pmatrix}$ und $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

b) $\int_G \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} d^2(x, y)$ mit $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3, x, y > 0\}$.

Hinweis zu b): Wählen Sie v geschickt (z.B. mit einer verschwindenden Komponente).

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Flächeninhalt der rechten Lemniskatenschleife für $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (siehe Aufgabe 1 von Blatt 9) mit Hilfe der Flächenformel.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Inhalt der von der Astroiden γ eingeschlossenen Fläche:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Aufgabe 4

- a) Es sei $x(t)$ die Population von Schafen und $y(t)$ die von Kaninchen zu einer Zeit t . Stellen Sie ein Lotka-Volterra-Modell unter der Annahme auf, dass Schafe Kaninchen verdrängen („konkurrierende Populationen“). Wie verändert sich dieses Modell unter der weiteren Annahme eines begrenzten Lebensraumes, in dem jede Population auch durch sich selbst beeinflusst wird?
- b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $h = h(x)$ und ein Potential von hw für:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= y^2 - x + 1 \end{aligned}$$