Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 19. Januar 2006

Analysis III für Lehramt Gymnasium

12. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 27. Januar 2006, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1 *Rotationsfläche*

Es sei $x = \gamma_1(t) > 0,\ z = \gamma_2(t),\ a \le t \le b$, die Parameterdarstellung einer Jordankurve Γ in der xz-Ebene und F die Fläche, die durch Rotation von Γ um die z-Achse entsteht. Zeigen Sie, dass für den Inhalt $\sigma(F)$ dieser Rotationsfläche gilt:

$$\sigma(F) = 2\pi \int_a^b \gamma_1(t)\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}\, dt$$

Berechnen Sie konkret den Flächeninhalt eines Torus, der durch Rotation des Kreises $K = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x-R)^2 + z^2 = r^2\}$ $(0 < r < R)$ um die z-Achse ensteht.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{C}$ so, dass $f(z) = a \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist.

b) In welchen $z \in \mathbb{C}$ ist $z|z|$ komplex-differenzierbar? Bestimmen Sie dort die Ableitung.

Aufgabe 3

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten harmonisch sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine konjugiert harmonische Funktion.

a) $u(x+iy) = e^y \cos x$ in $\mathbb{C}$

b) $u(z) = \log |z|^2$ in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ bzw. in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Aufgabe 4

Es sei f eine in einem Gebiet D holomorphe Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Gleichungen folgende Aussagen:

a) Gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist f in D konstant.

b) Ist der Realteil, der Imaginärteil oder der Betrag von f konstant, so ist f konstant.