Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo

Dortmund, 26. Januar 2006

Analysis III für Lehramt Gymnasium

13. Übungsblatt, WS 2005/06

Abgabe bis Freitag, 3. Februar 2006, 10.00 Uhr, in den Kasten 31 im Foyer.

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das komplexe Wegintegral der Funktion $f(z) = |z|^2$ über den positiv orientierten Rand Γ des Quadrats $Q = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re}\, z < 1, 0 < \text{Im}\, z < 1\}$. Was sagt das Ergebnis über f aus?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Intergralformel die folgenden Integrale:

$$1) \int\limits_{|z-(1+i)|=2} \frac{z^2}{z^2+1}\, dz \qquad 2) \int\limits_{|z|=2} \frac{z^2}{z^2+1}\, dz \qquad 3) \int\limits_{|z|=1} e^z (2z-i)^n\, dz \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(Der Ausdruck $|z - z_0| = r$ ist als Rand von $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ zu deuten.)

Aufgabe 2

Es sei f eine ganze (d.h. in $\mathbb{C}$ holomorphe) Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist der Realteil von f positiv, so ist f konstant.

b) Gibt es $r, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $|f(z)| \leq c\,|z|^n$ für $|z| \geq r$, so ist f ein Polynom.

Hinweis zu a): Zeigen Sie für die Funktion $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$: Ist $\text{Re}\, z > 0$, so gilt $|T(z)| < 1$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie jeweils, ob eine in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ holomorphe Funktion f existiert, die für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ folgendes erfüllt:

a) $f\left(\frac{i^n}{n}\right) = \frac{1}{n}$ b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$

Aufgabe 4

Gegeben sei das Quadrat $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}\, z| \leq 1, |\text{Im}\, z| \leq 1\}$.

a) Berechnen Sie alle Punkte $z \in \partial Q$ mit $\text{Im}\, z = 1$, für die das Produkt der Abstände von z zu den vier Eckpunkten von Q maximal ist.

b) Bestimmen Sie (ohne eine einzige Rechnung) alle Punkte $z \in Q$, für die das Produkt der Abstände von z zu den vier Eckpunkten von Q maximal ist.