3. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III

Sei $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre, und sei $N = (0, ..., 0, 1)$ und $S = (0, ..., 0, -1)$ der Nord- bzw. Südpol von S^n. Die **stereographische Projektion von** N **bzw.** S ist die Abbildung

$$\pi_N : S^n \backslash \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \ \pi_N(x) := (Nx) \cap \mathbb{R}^n$$

bzw.

$$\pi_S : S^n \backslash \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \ \pi_S(x) := (Sx) \cap \mathbb{R}^n,$$

wobei (Nx) bzw. (Sx) die Gerade durch N und x bzw. S und x und $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ als die Ebene $(x_{n+1} = 0)$ aufgefaßt wird.

1) Zeige: $\pi_N(x_1, ..., x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$

$$\pi_S(x_1, ..., x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

2) Zeige: $\alpha_1 := \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \backslash \{N\}$ und

$$\alpha_2 := \pi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \backslash \{S\}$$

sind Koordidatensysteme von S^n.

3) Zeige: α_1, α_2 sind **winkeltreu**, d. h. $\angle\big((d\alpha_i)_x(v),\, (d\alpha_i)_x(w)\big) = \angle(v, w)$ für alle $x, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $i = 1, 2$.