

6. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III

Sei

$$f(t, x) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \text{ oder } x \geq t^2 \\ 2t - \frac{2x}{t} & \text{für } t > 0 \text{ oder } 0 < x < t^2 \\ 2t & \text{für } t > 0 \text{ und } x \leq 0 \end{cases}$$

Definiere die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0(\mathbb{R})$ über

$$x_0(t) = 0$$

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t f(\tau, x_n(\tau)) d\tau.$$

Aufgabe 1:

Zeige: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht lokal Lipschitzstetig.

Aufgabe 2:

Berechne x_1, x_2, x_3, x_4 .

Aufgabe 3:

Zeige, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte besitzt.

Aufgabe 4:

Gib die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = 0$$

an.

Aufgabe 5:

Vergleiche die gefundenen Ergebnisse und bringe diese mit dem Stoff der Vorlesung in Verbindung.