

7. Übungsblatt zur Vorlesung Analysis III

Zu untersuchen ist die Differentialgleichung

$$(1) \quad x''(t) + \sin x(t) = 0$$

Aufgabe 1:

Bestimme alle **konstanten** Lösungen von (1).

Aufgabe 2:

Zeige: Ist x eine Lösung von (1), so ist

$$C := \frac{1}{2}(x'(t))^2 - \cos x(t)$$

konstant. Zeige, dass $C \geq -1$, und $C = -1$ nur für konstante Lösungen.

Aufgabe 3:

Folgere aus Aufgabe 2, dass die maximalen Lösungen von (1) alle auf ganz \mathbb{R} definiert sind.

Aufgabe 4:

Zeige: Ist $C > 1$, so gilt:

entweder x ist streng monoton steigend und $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \pm\infty$,
oder x ist streng monoton fallend und $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = \mp\infty$.

Aufgabe 5:

Zeige: Ist $C = 1$, so gilt:

entweder $x(t) = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,

oder x ist streng monoton, und $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (2n + 1)\pi$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = (2n + 1)\pi \pm 2\pi$.

Aufgabe 6:

Zeige: Ist $C < 1$, so ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und periodisch.