UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo
Dipl.-Math. M. Hadac

Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 1

Abgabe: Montag, den 24.10.05, 10 Uhr, Kastennr. 3

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, daß der Raum ℓ_∞ aller beschränkten Folgen ein Banachraum ist.

b) Zeigen Sie, daß der Raum c aller konvergenten Folgen und der Raum c_0 aller Nullfolgen abgeschlossene Unterräume von ℓ_∞ sind.

Aufgabe 2: Es sei X ein normierter Raum. Eine Reihe $\sum_{k\geq 1} x_k$ in X heißt *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen $(s_n := \sum_{k=1}^n x_k)_{n\geq 1}$ konvergiert, *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\| < \infty$ gilt. Zeigen Sie, daß X genau dann vollständig ist, wenn jede absolut konvergente Reihe in X konvergiert.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, daß durch

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m} := \sum_{k=0}^m \sup_{t\in[a,b]} |f^{(k)}(t)| = \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_{\sup}$$

eine Norm auf $\mathcal{C}^m([a,b])$ definiert wird.

b) Finde Sie eine zu $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^m}$ äquivalente *submultiplikative* Norm, die also $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$ für $f,g \in \mathcal{C}^m([a,b])$ erfüllt.

c) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\exists C \geq 0\ \forall f \in \mathcal{C}^1([a,b]) : \|f\|_{\sup} \leq C\|f\|_{W_2^1}$$

Aufgabe 4: Es seien X ein normierter Raum und $V \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum.

a) Zeigen Sie, daß durch

$$\|\hat{x}\| := \inf\{\|x+v\| | v \in V\}, \quad \hat{x} = x + V \in X/V$$

eine Norm auf dem Quotientenraum X/V definiert wird. Wo wird die Abgeschlossenheit von V benötigt?

b) Beweisen Sie, daß mit X auch X/V abgeschlossen ist.

Hinweis zu b) Benutzen Sie Aufgabe 2.