UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo
Dipl.-Math. M. Hadac

Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 3

Abgabe: Mittwoch, den 9.11.05, 14 Uhr, Kastennr. 3

Aufgabe 9:

a) Es sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$, $\|T\| < 1$. Für $(T_n) \subseteq L(X)$ mit $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$ zeige man, daß $\|(I - T_n)^{-1} - (I - T)^{-1}\| \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

b) Es seien $(t_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ eine unendliche Matrix mit $\sum_{j,k=0}^{\infty} |t_{jk}|^2 < 1$ und $y = (y_j) \in \ell_2$. Man zeige, daß das unendliche System linearer Gleichungen

$$x_j - \sum_{k=0}^{\infty} t_{jk} x_k = y_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

eine eindeutige Lösung $x = (x_j) \in \ell_2$ besitzt.

c) Es seien $(t_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$ und $x, y \in \ell_2$ wie in b). Man zeige, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ das endliche Gleichungssystem

$$x_j^{(n)} - \sum_{k=0}^{n} t_{jk} x_k^{(n)} = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

eine eindeutige Lösung $(x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$ hat. Für $z_n := (x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, 0, 0, \dots) \in \ell_2$ zeige man: $\|z_n - x\|_{\ell_2} \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 10: Es sei M ein separabler metrischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra.

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $f_i : M \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ stetige Funktionen ohne gemeinsame Nullstelle, d. h. zu jedem $x \in M$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $f_i(x) \neq 0$. Man zeige, daß es dann stetige Funktionen $g_i : M \to \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ gibt mit

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_i(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in M.$$

Hinweis: Man verwende eine stetige Zerlegung der Eins.

b) Es sei $f : M \to \mathcal{A}$ stetig, so daß $f(x)$ linksinvertierbar in $\mathcal{A}$ ist für alle $x \in M$. Man zeige, daß es dann eine *stetige* Funktion $g : M \to \mathcal{A}$ gibt mit $g(x)f(x) = e$ für alle $x \in M$.

Hinweis: Man zeige zunächst, daß es für jedes $x_0 \in M$ eine Kugel $K_\varepsilon(x_0)$ und eine stetige Funktion $g_{x_0} : K_\varepsilon(x_0) \to \mathcal{A}$ gibt, so daß $g_{x_0}(x)f(x) = e$ auf $K_\varepsilon(x_0)$ gilt. Man benutze dann eine stetige Zerlegung der Eins, um g zu definieren.

Aufgabe 11: Es sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n x\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

Man _versuche_ zu beweisen, daß dann $(I - T)^{-1} : X \to X$ existiert und stetig ist.