UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo
Dipl.-Math. M. Hadac

Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 5

Abgabe: Dienstag, den 22.11.05, 10 Uhr, Kastennr. 3

Aufgabe 15: Es seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $x, y \in \mathcal{A}$ so, daß $e - xy$ invertierbar ist. Man zeige, daß dann auch $e - yx$ invertierbar ist.
Hinweis: Man betrachte $e + yzx$ mit $z = (e - xy)^{-1}$.

Aufgabe 16: Es seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $x, y \in \mathcal{A}$.

a) Man benutze Aufgabe 15, um zu zeigen, daß $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$ gilt.

b) Man gebe ein Beispiel an, in dem $\sigma(xy) \neq \sigma(yx)$ gilt.

c) Man folgere, daß stets $xy - yx \neq e$ gilt.

Aufgabe 17:

a) Es seien I eine Menge und $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\exists C > 0 \; \forall I' \in \mathfrak{E}(I) : \sum_{i \in I'} |a_i| \leq C$, d. h. $(a_i)_{i \in I}$ ist summierbar.

(ii) $\exists C > 0 \; \forall I' \in \mathfrak{E}(I) : |\sum_{i \in I'} a_i| \leq C$,

(iii) $\exists s \in \mathbb{C} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists I_0 \in \mathfrak{E}(I) \; \forall I' \in \mathfrak{E}(I) : I_0 \subseteq I' \implies |\sum_{i \in I'} a_i - s| < \varepsilon$.

Sind diese Aussagen erfüllt, so zeige man, daß $s = \sum_{i \in I} a_i$ gilt.

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Familien summierbar sind:

(i) $(\frac{1}{2^k + 2^l})_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$,

(ii) $(\frac{1}{(k^p + l^q)^s})_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ für $p, q, s > 0$.

Aufgabe 18: Es sei H ein Hilbertraum.

a) Zeigen Sie

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{für } x, y \in H \tag{1}$$

und geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Aussage in $H = \mathbb{R}^2$.

b) Benutzen Sie (1), um

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in E : \|x\| = \|y\| = 1, \|\frac{1}{2}(x + y)\| \geq 1 - \delta \implies \|x - y\| \leq \varepsilon$$

zu beweisen.