



## Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 6 Abgabe: Dienstag, den 29.11.05, 10 Uhr, Kastennr. 3

**Aufgabe 19:** Wir betrachten  $K \in L(L_2([-\pi, \pi]))$  definiert durch

$$(Kf)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t)f(t) dt, \quad f \in L_2([-\pi, \pi]).$$

Man bestimme sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren von  $K$ .

Hinweis: Man benutze das Additionstheorem für den Sinus.

**Aufgabe 20:** Es sei  $H$  ein Hilbertraum. Für einen Unterraum  $F$  von  $H$  zeige man

$$(F^\perp)^\perp = \overline{F}.$$

Man finde ein Beispiel, für das  $(F^\perp)^\perp \neq F$  ist.

**Aufgabe 21:** Es sei  $\tilde{S} \in L(H^2(D))$  der Shift-Operator auf  $H^2(D)$ , d.h.  $\tilde{S}f(z) := zf(z)$  für  $f \in H^2(D)$  und  $z \in D$ .

- Man bestimme den adjungierten Operator  $\tilde{S}^*$ . Ist  $\tilde{S}$  selbstadjungiert, unitär oder normal?
- Man finde (weitere) nicht triviale, invariante Unterräume  $M$  von  $\tilde{S}$ . Man versuche einen invarianten Unterraum mit unendlicher Kodimension zu finden (d. h. mit  $\dim M^\perp = \infty$ ).

Hinweis: Bei a) überlege man sich zunächst, wie der adjungierte Operator des Shift-Operators  $S$  auf  $\ell_2$  aussieht.