UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo
Dipl.-Math. M. Hadac

Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 9

Abgabe: Dienstag, den 03.01.06, 16 Uhr, Kastennr. 3

Aufgabe 28: Es sei H ein Hilbertraum. Man zeige, dass die *kanonische Isometrie*

$$\iota : H \to H'', \ (\iota x)(f) = f(x), \ x \in H, \ f \in H'$$

surjektiv ist.

Aufgabe 29: Es sei $1 \le p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = \infty$ für $p = 1$). Man zeige, dass

$$J : \ell_q \to \ell_p', \ (Jy)(x) := \sum_{j=0}^{\infty} x_j y_j, \ x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in \ell_p, \ y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \in \ell_q$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 30: Man zeige:

a) X ist genau dann uniform konvex, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in X$ gilt: $(\|x\| = \|y\| = 1, \ \|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon)$.

b) Es sei X uniform konvexer Banachraum, $C \subseteq X$ abgeschlossen und konvex sowie $x \notin C$. Dann gibt es genau ein $y \in C$ mit

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C) := \inf\{\|x - c\| : c \in C\}.$$

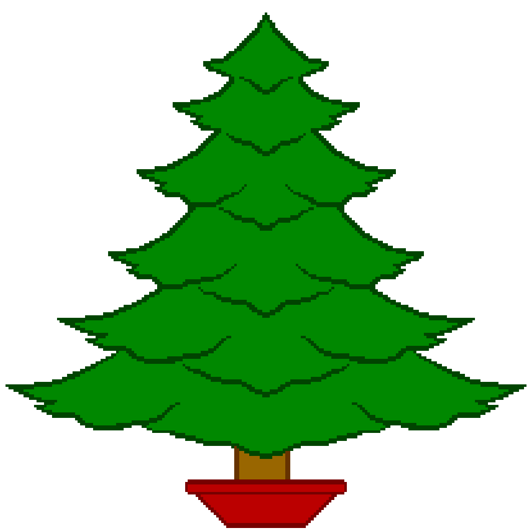
Hinweis: Zur Definition der uniformen Konvexität siehe Skript, Kapitel 12

Aufgabe 31: Es seien $f_n \in C([0,1])$ gegeben durch $f_n(x) := f(n(n+1)x - n)$, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{für } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für welche Folgen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gibt es ein $\mu \in (C([0,1]))'$ mit $\mu(f_n) = \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$?

Hinweis: Man skizziere zunächst die f_n.



Wir wünschen allen Hörerinnen und Hörern der Vorlesung frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!