UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo
Dipl.-Math. M. Hadac

Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 10

Abgabe: Dienstag, den 10.01.06, 16 Uhr, Kastennr. 3

$\boxed{\textbf{Aufgabe 32:}}$ Es sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f_n(x) := \sin(nx)$ für $x \in (0,\pi)$. Für $1 \leq p < \infty$ bestimme man, ob diese Folge stark bzw. schwach in $L_p((0,\pi))$ konvergiert und ggf. den Grenzwert. Konvergiert die Folge stark bzw. schwach-* in $L_\infty((0,\pi))$? Wo ist sie punktweise konvergent?

Hinweis: Um die schwache Konvergenz in L_p zu untersuchen, bestimme man zunächst für $\phi \in C_c^\infty((0,\pi))$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\phi(x)\,dx$.

$\boxed{\textbf{Aufgabe 33:}}$ Es sei H ein Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ eine Folge in H und $x \in H$. Man beweise, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

- $\|x_n - x\| \to 0$ für $n \to \infty$, d. h. (x_n) konvergiert stark gegen x
- (x_n) konvergiert schwach gegen x und $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$

$\boxed{\textbf{Aufgabe 34:}}$ Es seien $1 < p < \infty$ und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell_p$ die Folge der Einheitsvektoren in ℓ_p gegeben durch $e_k := (\delta_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$. Zu $\varepsilon > 0$ bestimme man *explizit* ein $n \in \mathbb{N}$ und $s_k \in [0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n s_k = 1$ und $\| \sum_{k=1}^n s_k e_k\|_{\ell_p} < \varepsilon$, deren Existenz aus 11.9 folgt.