UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo
Dipl.-Math. M. Hadac

Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 12

Abgabe: Dienstag, den 24.01.06, 16 Uhr, Kastennr. 3

Aufgabe 38: Es seien E und F metrische lokalkonvexe Räume. Man zeige:

a) Zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ mit $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ existieren Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ mit $\lambda_n \to 0$ in $\mathbb{R}$, $y_n \to 0$ in E und $x_n = \lambda_n y_n$.

b) Man folgere aus Teil a), daß eine lineare Abbildung $T : E \to F$ genau dann stetig ist, wenn sie beschränkte Mengen von E in beschränkte Mengen von F abbildet.

Aufgabe 39: Es seien

$$s := \{x = (x_j)_{j=1}^\infty | \forall n \in \mathbb{N} : p_n(x) := \sup_{j\geq 1} |x_j| j^n < \infty\}$$

und $q_n(x) := \sum_{j=1}^\infty |x_j| j^n$ für $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in s$, $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:

a) $(s, (p_n))$ und $(s, (q_n))$ sind Fréchetträume.

b) Die Abbildungen $I_1 : (s, (p_n)) \to (s, (q_n))$, $I_1(x) = x$ und $I_2 : (s, (q_n)) \to (s, (p_n))$, $I_2(x) = x$ sind stetig.

c) Der Dualraum s' kann identifiziert werden mit dem Folgenraum

$$\sigma = \{y = (y_j)_{j=1}^\infty | \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{j\geq 1} |y_j| j^{-n} < \infty\}.$$

Hinweis zu c): Man benutze die Abbildung J aus Aufgabe 29.

Aufgabe 40: Man beweise Satz 14.6.

Hinweis: Man benutze für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $M_n := \{f \in C([a,b]) | \exists x_0 \in [a,b] : |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}| \leq n\}$.