UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Kaballo
Dipl.-Math. M. Hadac

Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 13

Abgabe: Dienstag, den 31.01.06, 16 Uhr, Kastennr. 3

Aufgabe 41: Es sei $M := \{f \in C([0,1]) | \exists \varepsilon > 0 : f(x) = 0$ für alle $0 \leq x \leq \varepsilon\}$. Man finde eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,1])'$ mit $\phi_n(f) \to 0$ für alle $f \in M$ und $\|\phi_n\| \to \infty$. Ist M von 2. Kategorie in $C([0,1])$?

Aufgabe 42: Es sei $\{r_n | n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Für $M_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{2^{-n-k}}(r_n)$ und $M := \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k \cap [0,1]$ zeige man:

a) Die Menge $N := [0,1] \setminus M$ ist mager, aber es gilt $m(N) = 1$, wobei m das eindimensionale Lebesguemaß bezeichne.

b) M ist eine Lebesgue-Nullmenge von zweiter Kategorie in $[0,1]$.

Aufgabe 43: Es seien X ein Banachraum und $(J, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq L(X)$ ein Fréchetraum, der ein *Ideal* in $L(X)$ sei, d. h. für $T \in J$ und $A \in L(X)$ gilt: $TA \in J$ und $AT \in J$. Weiter sei die Abbildung $\mathrm{id} : J \to L(X), \mathrm{id}(T) = T$ stetig. Man zeige:

a) Für $T \in J$ sind $\mathcal{R}_J : L(X) \to J, A \mapsto AT$ und $\mathcal{L}_J : L(X) \to J, A \mapsto TA$ stetig.

b) Für $A \in L(X)$ sind $\tilde{\mathcal{R}}_A : J \to J, T \mapsto TA$ und $\tilde{\mathcal{L}}_A : J \to J, T \mapsto AT$ stetig.

Hinweis: Man benutze den Satz vom abgeschlossenen Graphen.