



**Übungsaufgaben Funktionalanalysis I (WS 2005/06), Blatt 14**  
**Abgabe: Dienstag, den 07.02.06, 16 Uhr, Kastennr. 3**

**Aufgabe 44:** (Satz von Hellinger-Toeplitz) Es seien  $H$  ein Hilbertraum und  $T : H \rightarrow H$  ein symmetrischer, linearer Operator, d. h. es gelte  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  für alle  $x, y \in H$ . Man zeige, daß  $T$  stetig ist.

Hinweis: Man benutze den Satz vom abgeschlossenen Graphen.

**Aufgabe 45:** Man berechne folgende Ableitungen im Distributionssinn:

a)  $\frac{d}{dx} H = \delta$

b)  $\frac{d}{dx} \log |x| = CH \frac{1}{x}$

c) Was ist  $\frac{d}{dx} |x|$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ?

Hinweis:  $H$  bezeichne die Heaviside-Funktion, d. h. die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, \infty)$ .

**Aufgabe 46:**

a) Es sei  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Man zeige, daß  $u_{\pm}(t, x) = f(x \pm ct)$  eine Lösung der Wellengleichung in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  ist, d. h. man zeige:  $(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) u_{\pm} = 0$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .

b)  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$  sei gegeben durch

$$g(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > |x|, \\ 0, & t \leq |x|. \end{cases}$$

Man zeige, daß  $(\partial_t^2 - \partial_x^2)g = \delta$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  gilt.