Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 1

Abgabe bis Mo den 24.10.05, 14:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 1

a) Geben Sie jeweils mehrere mathematische Schreibweisen für die folgenden Mengen an:

- Menge aller ungeraden Zahlen,
- Menge aller Quadratzahlen zwischen 0 und 10000,
- Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen, deren Summe höchstens 10 und deren Differenz höchstens 2 ist,
- wie gerade, aber für ganze Zahlen.

b) Beweisen Sie folgende Eigenschaft von Mengen. Wenn $A \cap B = \emptyset$ ist, dann folgt $A \setminus B = A$. Was gilt für $B \setminus A$?

c) Sei $A \neq \emptyset$. Was ist $A \setminus A$, $A \cup A$, $A \cap A$, $A \cup \emptyset$, $A \cap \emptyset$? (Ihre Vermutungen müssen Sie natürlich begründen.)

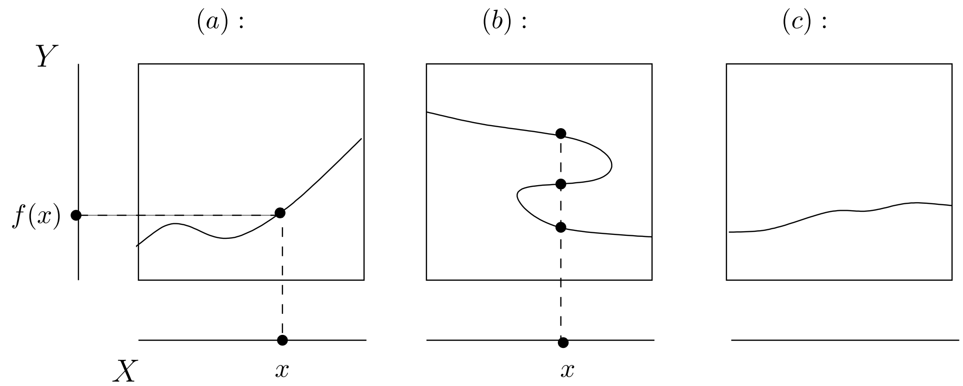
Aufgabe 2
Es sei $M = \{1, 2, \ldots, 60\}$. Wir betrachten die folgenden Teilmengen von M:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in M \mid n \text{ ist gerade }\} \\ B &= \{n \in M \mid n \leq 40\} \\ C &= \{n \in M \mid n > 20\} \end{aligned}$$

Geben Sie die folgenden Mengen durch Aufzählung der Elemente und auch in beschreibender Form an:

$$A \cap B,\ (M \setminus B) \cap C,\ (M \setminus B) \cap (M \setminus C),\ M \setminus (B \cap C),$$
$$M \setminus (A \cap B \cap C),\ (A \setminus B) \cup (A \setminus C),\ (M \setminus A) \cup (M \setminus B) \cup (M \setminus C)$$

Aufgabe 3
Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung, so nennt man die Menge $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ den *Graphen* Γ_f von f. Der Graph ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $X \times Y$. In der Skizze (a) ist er durch eine Linie angedeutet. Graph einer Abbildung kann nun nicht jede beliebige Teilmenge von $X \times Y$ sein, denn z.B. gibt es zu jedem x ja nur *ein* $f(x)$, daher ist die in Skizze (b) gezeichnete Linie kein Graph. Die Aufgabe ist nun, Graphen von Abbildungen f mit gewissen vorgegebenen Eigenschaften zu zeichnen. Als Beispiel wie es gemacht werden soll ist in (c) ein Graph einer nicht surjektiven Abbildung dargestellt.



Man zeichne in der beschriebenen Weise Beispiele von Graphen von Abbildungen f mit den folgenden Eigenschaften:

a) f surjektiv, aber nicht injektiv,

b) f injektiv, aber nicht surjektiv,

c) f bijektiv,

d) f konstant,

e) f nicht surjektiv und nicht injektiv,

f) $X = Y$ und $f = \mathrm{id}_X$,

g) $f(X)$ besteht aus zwei Elementen.

Aufgabe 4
Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen Sie folgende zwei Aussagen.

a) Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

Die Abbildungen in a) müssen dabei nicht surjektiv sein, die in b) nicht injektiv. Finden Sie Beispiele für solche Abbildungen.