Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
## Übungsblatt 2

Abgabe bis Mi den 02.11.05, 10:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

**Aufgabe 5** (Anzahlen von Abbildungen)
Zu endlichen Mengen $M$ und $N$ betrachten wir

$$\mathrm{Abb}(M,N) = \{f : M \longrightarrow N\}\,,$$

die Menge aller Abbildungen von $M$ nach $N$.

a) Man schreibe $\mathrm{Abb}(M,N)$ für $M = \{a,b\}$ und die drei Fälle $N = \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}$ komplett auf.

b) Man bestimme allgemein die Kardinalität von $\mathrm{Abb}(M,N)$.

c) Was ändert sich, wenn wir nur injektive Abbildungen betrachten?

**Aufgabe 6** (Urbilder und Bilder von Teilmengen)
Es seien $A, B \subseteq X$ und $U, V \subseteq Y$ Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Bestimme für $X = \mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$, $Y = \{0,1,2,3,4\}$, $f(A) = |A|$ die Mengen $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\emptyset)$ und $f^{-1}(\{0,2\})$.

b) Zeige allgemein $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

c) Zeige $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für die Bilder von Teilmengen $A, B \subseteq X$.

d) Was ist mit $f(A \cap B)$ im Vergleich zu $f(A) \cap f(B)$?

**Aufgabe 7** (Rechenaufgabe zum Lemma von Bezout)
Es sei $g = \mathrm{ggT}(a,b)$ der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen $a, b$. Berechne mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, für die gilt $xa + yb = g$.

$$i)\ a = 135;\ b = 95 \quad ii)\ a = 136;\ b = 95 \quad iii)\ a = 136;\ b = 96$$

**Aufgabe 8**
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremde ganze Zahlen. Zeige, dass die Gleichung

$$x \cdot a^2 + y \cdot b = a - 1$$

eine Lösung $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat.

**Hinweis:** Lemma von Bezout.