Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 3

Abgabe bis Di den 08.11.05, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 9

a) Man stelle die Gruppentafel (Verknüpfungstafel) der Gruppe $(S_3, \circ)$ auf und mache sich klar, daß diese Gruppe nicht kommutativ ist.

b) Man schreibe alle Elemente von S_4 auf und berechne exemplarisch für zwei Paare ρ, σ von Elementen von S_4 die Produkte $\rho \circ \sigma$ und $\sigma \circ \rho$.

Aufgabe 10

a) Man schreibe für $m = 7$ und $m = 8$ die Verknüpfungstafeln für $+_m$ und $\cdot_m$ auf der Menge $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ auf.

b) Man begründe, daß $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ zusammen mit der Multiplikation $\cdot_7$ eine Gruppe ist. (Das Assoziativgesetz braucht nicht bewiesen zu werden.)

Aufgabe 11
Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeige folgendes:

a) Zu je zwei Elementen $a, b \in G$ besitzen die Gleichungen

$$a * x = b \quad \text{und} \quad y * a = b$$

jeweils eine eindeutige Lösung $x \in G$ bzw. $y \in G$.

b) In jeder Zeile der Gruppentafel von $(G, *)$ steht eine Permutation der Elemente von G. (Hier sollte G endlich sein.)

Man überprüfe die zweite Aussage an den Beispielen aus den Aufgaben 9 und 10 sowie den aus der Vorlesung bekannten Beispielen.

Aufgabe 12 (Kartesisches Produkt von Gruppen)
Es seien G und H zwei Gruppen mit neutralem Element e_G bzw. e_H, wobei die Verknüpfung in beiden Fällen mit $\circ$ bezeichnet werde. Wir definieren auf dem kartesischen Produkt $G \times H$ eine Verknüpfung durch

$$(g_1, h_1) \circ (g_1, h_2) = (g_1 \circ g_2,\ h_1 \circ h_2)\,,$$

(dabei $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$).
Zeige, daß $G \times H$ mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist.

Schreibe als Beispiel die Verknüpfungstafel von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (natürlich mit der Verknüpfung $+_2$) auf. Vergleiche sie mit der Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.