Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 4

Abgabe bis Di den 15.11.05, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 13

a) Berechne die multiplikativen Inversen der Zahlen $25, 31, 33$ und 37 in $\mathbb{Z}_{42}$.

b) Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_{12}^*$. Stelle die Gruppentafel auf.
Zusatzfrage: Ist diese Gruppe isomorph zu einer der Gruppen $\mathbb{Z}_m$ (für ein geeignetes m) ?
(Wenn wir von „der“ Gruppe $\mathbb{Z}_m$ sprechen, ist als Verknüpfung immer die Addition $+_m$ gemeint.)

Aufgabe 14
Betrachte die Menge $U_8 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Die Elemente von U_8 heißen 8-*te Einheitswurzeln*.

a) Skizziere die Menge U_8.

b) Zeige, dass U_8 eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe der komplexen Zahlen ist.

c) Zeige durch Angabe eines geeigneten Isomorphismus, dass U_8 und $\mathbb{Z}_8$ isomorph sind.

Aufgabe 15

a) Zeige, dass das in der Vorlesung erwähnte Beispiel $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist.

b) Zeige das entsprechende für $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Gilt für diesen Ring noch eine stärkere Aussage ?
(Tipp: welche Elemente sind invertierbar ?)

Aufgabe 16
Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die Relation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \;:\Leftrightarrow\; \exists\, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } (y_1, y_2) = (rx_1, rx_2)\,.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Gib ein Repräsentantensystem an !

Es ist hilfreich, sich die Elemente von $\mathbb{R}^2$ als Punkte der Ebene vorzustellen.