Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 5

Abgabe bis Di, den 22.11.05, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 17

a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien H_1, $H_2 \subseteq G$ Untergruppen. Zeige, dass dann auch $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe ist.

b) Gilt eine analoge Aussage auch für Ringe ? Das heißt, ist $U_1 \cap U_2$ ein Unterring, wenn U_1, $U_2 \subseteq R$ Unterringe von $(R, +, \cdot)$ sind ?

Aufgabe 18

a) Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die Relation

$$x \sim y :\Leftrightarrow \; x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \, .$$

  i) Prüfe, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

  ii) Gib gegebenenfalls ein Repräsentantensystem an.

b) Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die Relation $\sim$ aus Aufgabe 16, d.h.

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) :\Leftrightarrow \; \exists r \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } (y_1, y_2) = (rx_1, rx_2) \, .$$

Gib ein Repräsentantensystem an.

Aufgabe 19

a) Zeige die Isomorphie der Gruppen $\mathbb{Z}_m^*$ und $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

b) Sei $U_8 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^8 = 1\}$ die Gruppe der 8-ten Einheitswurzeln aus Aufgabe 14. Zeige durch Angabe eines geeigneten Isomorphismus, dass U_8 und $\mathbb{Z}_8$ isomorph sind.

c) Ist die Gruppe $\mathbb{Z}_{12}^*$ isomorph zu einer der Gruppen $\mathbb{Z}_m$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 20
Betrachte auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow \; a + d = b + c \,.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass eine Bijektion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}$ existiert.

c) Definiere
$$[(a, b)]_\sim \oplus [(c, d)]_\sim := [(a + b, c + d)]_\sim \,.$$
Zeige, dass $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

d) Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim, \oplus)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ isomorph sind.