Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 6

Abgabe bis Di, den 29.11.05, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 21
Prüfe nach, ob es sich bei den folgenden Vorschriften um sinnvoll definierte ("wohldefinierte", siehe unten) verknüpfungstreue Abbildungen handelt:

a) $f : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{Z}/3m\mathbb{Z}, \oplus)$, $[x]_m \mapsto [x]_{3m}$

b) $g : (\mathbb{Z}_m, +_m) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $x \mapsto x$

c) $h : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, $x \mapsto e^x$

Aufgabe 22
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $*$ eine Verknüpfung auf einer Menge H. Sei weiterhin $\varphi : G \longrightarrow H$ eine surjektive verknüpfungstreue Abbildung. Zeige:

a) $(H, *)$ ist eine Gruppe.

b) Falls $(G, \cdot)$ abelsch ist, ist auch $(H, *)$ abelsch.

Tipp: Das Skript benutzen!

Aufgabe 23
Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine n-elementige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ ist die *symmetrische Differenz von A und B* durch

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

gegeben. Man erhält auf diese Weise eine Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$. Zeige, dass $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ eine abelsche Gruppe ist.

Hinweis: Finde eine geeignete Abbildung von der Gruppe $(\mathbb{Z}_2^n, +_2)$ nach $\mathcal{P}(M)$ und benutze Aufgabe 22.

Aufgabe 24
Sei M eine Menge und K ein Körper. Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Abb}(M, K)$ der Abbildungen von M nach K.
Wähle ein $m_0 \in M$ und betrachte $U := \{f \in \mathrm{Abb}(M, K) \mid f(m_0) = 0\}$. Zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(M, K)$ ist.

Bitte wenden.

Erläuterung zum Begriff *wohldefiniert*:

In der Vorlesung, Beweis von Satz 1.4.13 hatten wir gezeigt, daß die Verknüpfungen $\oplus$ (und $\odot$) auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sinnvoll definiert sind in folgendem Sinne:
bei gegebenem $[a]_m$ und $[b]_m$ liefert die rechte Seite $[a+b]_m$ der Definition ein eindeutiges Ergebnis, d.h. $[a+b]_m$ hängt nur von den Klassen $[a]_m$ und $[b]_m$ ab (aber nicht von den "Vertretern" a und b selbst. (Entsprechend auch für $\odot$.)

Man sagt auch: die Verknüpfung ist *wohldefiniert*. Dieser Begriff wird also im Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen, genauer Äquivalenzklassen gebraucht.

Er wird analog benutzt für Abbildungen, die auf einer Menge von Äquivalenzklassen definiert sind.

Beispiel Die Vorschrift $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $[a]_{10} \mapsto [a]_5$ ist wohldefiniert.

Denn wenn $a' \in \mathbb{Z}$ ein weiteres Element ist mit $[a]_{10} = [a']_{10}$, dann sind auch die zugeordneten Elemente gleich: es gilt auch $[a]_5 = [a']_5$.