Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 7

Abgabe bis Di, den 06.12.05, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 25

a) Zeige, dass jeder Untervektorraum U eines K-Vektorraumes V eine Untergruppe von $(V, +)$ ist.

b) Es sei K ein Körper und V eine Menge mit zwei Verknüpfungen wie in der Definition eines Vektorraumes, für die die Axiome (V1) bis (V3) und (V5) bis (V8) gelten. Zeige, dass dann auch (V4) gilt (Existenz von Inversen bzgl $+$).

Das Vektorraumaxiom (V4) könnte man in der Definition also weglassen.

Aufgabe 26
Sei V ein K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Zeige:

a) $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum.

b) $U_1 \cup U_2$ ist ein Unterraum genau dann, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

c) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$ ist ein Unterraum.

Aufgabe 27
Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die davon aufgespannten Unterräume $U := \mathrm{Lin}\{u_1, u_2\}$ und $V := \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$. Bestimme den Unterraum $U \cap V$.

Aufgabe 28
Löse die folgenden Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rlcl} (1+i)\cdot z_1 & +(1+i)\cdot z_2 & = & -2+2i \\ (2+i)\cdot z_1 & +(5-i)\cdot z_2 & = & -3+9i \\ z_1 & +(1+i)\cdot z_2 & = & -1+i \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{llllll}
[1]_7 \cdot x_1 & +[2]_7 \cdot x_2 & +[3]_7 \cdot x_3 & +[4]_7 \cdot x_4 & = & [5]_7 \\
[2]_7 \cdot x_1 & +[3]_7 \cdot x_2 & +[4]_7 \cdot x_3 & +[5]_7 \cdot x_4 & = & [4]_7 \\
[4]_7 \cdot x_1 & +[1]_7 \cdot x_2 & +[5]_7 \cdot x_3 & +[2]_7 \cdot x_4 & = & [6]_7 \\
[1]_7 \cdot x_1 & +[5]_7 \cdot x_2 & +[2]_7 \cdot x_3 & +[6]_7 \cdot x_4 & = & [2]_7
\end{array}$$

Bei a) soll die Lösung in $\mathbb{C}$ gesucht werden, bei b) in $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Um bei b) ein „Klammerchaos“ zu vermeiden, benutze die abkürzende Schreibweise $\overline{x}$ anstelle von $[x]_7$, also z.B. $\overline{4} = [4]_7$.