Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)

Übungsblatt 8

Abgabe bis Di, den 13.12.05, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 29

Sei $M := \{a, b\}$ und $\mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit drei Elementen.

a) Gib den Vektorraum $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{F}_3)$ explizit an, indem du seine Elemente aufzählst.

b) Untersuche die Vektoren f_1, f_2 und f_3 auf lineare Unabhängigkeit, wobei die Abbildungen wie folgt gegeben sind:

$$\begin{array}{rcl} f_1(a) & = & \overline{1} \\ f_1(b) & = & \overline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2(a) & = & \overline{2} \\ f_2(b) & = & \overline{1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_3(a) & = & \overline{1} \\ f_3(b) & = & \overline{1} \end{array}.$$

c) Gib eine Basis von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{F}_3)$ an.

Aufgabe 30

Zu einem Vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3$ mit ganzzahligen Koordinateneinträgen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ den Vektor $\bar{x} = ([x_1]_5, [x_2]_5, [x_3]_5)$. Bestimme drei $\mathbb{Q}$-linear unabhängige Vektoren $u, v, w \in \mathbb{Z}^3 \subseteq \mathbb{Q}^3$, für die $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ linear abhängig sind.
Wie könnte man solche Situationen noch weiter unterscheiden ?

Aufgabe 31

Im $\mathbb{R}^5$ sei folgender Unterraum gegeben:

$$U := \mathrm{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimme die Dimension von U.

Aufgabe 32

Sei V ein K-Vektorraum und $M_1, M_2 \subseteq V$ Teilmengen. Zeige

a) $\mathrm{Lin}\{M_1 \cap M_2\} \subseteq \mathrm{Lin}\{M_1\} \cap \mathrm{Lin}\{M_2\}$ und

b) $\mathrm{Lin}\{M_1 \cup M_2\} \supseteq \mathrm{Lin}\{M_1\} \cup \mathrm{Lin}\{M_2\}$.

Gilt vielleicht sogar Gleichheit? Falls nicht, gib ein Gegenbeispiel an.