Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)

Übungsblatt 9

Abgabe bis Di, den 03.12.06, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 33

a) Tausche zwei Vektoren der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ gegen die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus, so dass man wieder eine Basis des $\mathbb{R}^4$ erhält.

b) Wir betrachten die Untervektorräume $U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0\}$ und $V := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 + x_4 = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$. Gib eine Basis von $U \cap V$ an und ergänze sie zu Basen von U bzw. V.

Aufgabe 34

Es seien V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, falls es linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ gibt mit $v_i = \lambda_i w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

b) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, falls $v_n \notin \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$.

c) Die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear unabhängig, falls jede echte Teilmenge linear unabhängig ist.

Aufgabe 35

Zu einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichne $\mathrm{Pol}(I, \mathbb{R})$ den Vektorraum aller Polynomfunktionen auf I und $\mathrm{Pol}_n(I, \mathbb{R})$ den Unterraum aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.

a) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Pol}(I, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$f_1(x) := x^2, \quad f_2(x) := 2x + 1, \quad f_3(x) := x^2 - 1$$

für alle $x \in I$. Prüfe, ob f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

b) Gib eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(I, \mathbb{R})$ an.

Hinweis: Bei Teil b) darf benutzt werden, dass ein reelles Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 36
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. V ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei die Addition dieselbe ist und die Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ als Einschränkung der Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ definiert ist.

a) Sei $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Re}(x_i) = 0\}$. Untersuche, ob U ein Untervektorraum des $\mathbb{C}$- bzw. des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}^n$ ist.

b) Es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Basis von V als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Gib eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums mit Beweis an. (Tipp: Betrachte die Basis $1, i$ von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.)