Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 10

Abgabe bis Di, den 10.01.06, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 37
Die Matrizen A, B und C mit Elementen aus $\mathbb{R}$ seien definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne, soweit möglich, die folgenden Matrizenausdrücke:

a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2$ und C^2,

b) C^{100},

c) $A(BA - C)$ und $ACB + ABC$.

Aufgabe 38
Untersuche, ob folgende Abbildungen linear sind. Falls möglich gib eine Matrix A an, so dass sich F in der Form $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ schreiben lässt.

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_3 - 2x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$,

c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^3 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$,

d) $F : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^3$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^3 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$,

e) $F : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $F(\varphi) = \varphi(1)$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 39

Sei $\mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ vom Grad ≤ 2. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \, . \\ f &\longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)dt \end{aligned}$$

a) Zeige: L ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

b) Besimme eine Basis von $\mathrm{Kern}(L)$.

Aufgabe 40

Seien V und W K-Vektorräume und $F : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

a) Sei $U \subseteq W$ ein Untervektorraum von W. Zeige, dass $F^{-1}(U)$ ein Untervektorraum von V ist.

b) Sei $A \subseteq W$ ein affiner Unterraum von W mit $A \cap F(V) \neq \emptyset$. Zeige, dass $F^{-1}(A)$ ein affiner Unterraum von V ist.

c) Erläutere Teil b) an einem Beispiel.

d) Folgere aus Teil b) die Bemerkung 2.4.13 und daraus den Satz 2.4.14 aus der Vorlesung.

Hinweis: Bearbeite zuerst Teil c) und beweise dann erst Teil b) !