Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 11

Abgabe bis Di, den 17.01.06, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 41
Zu einer $k \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ mit Einträgen aus einem Körper K bezeichne mit A^T die $n \times k$-Matrix $A^t := (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$. A^t heißt *die zu A transponierte Matrix.*

Sei A eine $k \times n$-Matrix und B eine $n \times m$-Matrix. Zeige die folgenden Regeln:

a) $(AB)^t = B^t A^t$,

b) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, falls $k = n$ und A invertierbar. Begründe explizit, dass auch A^t invertierbar ist.

Aufgabe 42
Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix. Betrachte die linearen Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{x} & \longmapsto & A\vec{x} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \vec{y} & \longmapsto & A^t\vec{y} \end{array}$$

Dabei bezeichnet A^t die transponierte Matrix zu A (vgl. Aufgabe 41).
Zeige:

a) f ist genau dann injektiv, wenn g surjektiv ist.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn g injektiv ist.

Hinweis: Betrachte das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ und finde einen Zusammenhang zwischen der Injektivität/Surjektivität und dem Zeilen-/Spaltenrang von A.

Aufgabe 43
Sei $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & \alpha \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimme eine Basis von $\mathrm{Kern}(F_A)$ und $\mathrm{Bild}(F_A)$ in Abhängigkeit von α.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 44

a) Berechne die inverse Matrix A^{-1} von

$$A := \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$$

b) Löse möglichst kurz die zwei linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}_1$ und $A\vec{x} = \vec{b}_2$, wobei

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen hier wie schon früher die Abkürzung $\overline{a} := [a]_5$.