Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)

Übungsblatt 12

Abgabe bis Di, den 24.01.06, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 45

Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \qquad F(\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}, \qquad F(\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},$$

so dass

a) F ein Isomorphismus ist?

b) F kein Isomorphismus ist?

Aufgabe 46

Es seien $a_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\3\end{pmatrix}$ und $W := \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\}$.

a) Gib eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ an mit $\mathrm{Kern}(F) = W$ und $\mathrm{Bild}(F) = \mathrm{Lin}\{a_1, a_2\}$

b) Ist F eindeutig bestimmt?

Aufgabe 47

Sei $V_n := \mathrm{Pol}_n([-1,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ vom Grad $\leq n$.

a) Wähle $\mathcal{A} = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, wobei $v_i(x) = x^i \ \forall x \in [-1,1]$, als Basis von V_n. Betrachte die lineare Abbildung L, die jedem Polynom f seine Ableitung f' zuordnet, also

$$L : V_n \quad \to \quad V_n \ .$$

Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(L)$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

b) Sei $\mathcal{B} := (w_0, w_1, \ldots, w_4)$, wobei $w_0(x) := 2$, $w_1(x) = x^2 - x + 1$, $w_2(x) = x^2 - 1$, $w_3(x) = x^4 - x^3 + 2$ und $w_4(x) = x^4 - x^2 + 1 \ \forall x \in [-1,1]$. Sei $f \in V_4$ die durch $f(x) = 17x^4 - 32x^3 + 1 \ \forall x \in [-1,1]$ gegebene Polynomfunktion. Zeige, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V_4 ist, und bestimme den Koordinatenvektor von f bezüglich $\mathcal{B}$.

Aufgabe 48
Seien U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume und $F : U \to V$ und $G : V \to W$ lineare Abbildungen. Beweise folgende Ungleichung:

$$\mathrm{rang}(F) + \mathrm{rang}(G) - \dim(V) \leq \mathrm{rang}(G \circ F) \leq \min\{\mathrm{rang}(F), \mathrm{rang}(G)\}.$$

Kann mann sagen, unter welchen Voraussetzungen Gleichheit gilt?