Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Dr. Frank Bowert WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 13

Abgabe bis Di, den 31.01.06, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 49
Sei $\mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ vom Grad ≤ 2. Wähle $\mathcal{A} = (v_0, v_1, v_2)$, wobei $v_i(x) = x^i \ \ \forall x \in [-1,1]$, als Basis von $\mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R})$. Als Basis von $\mathbb{R}$ sei $\mathcal{E} = \{1\}$ gegeben. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \ . \\ f &\longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)dt \end{aligned}$$

(siehe Aufgabe 39)

a) Bestimme die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}}(L)$.

b) Gib eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R})$ an, so dass für die Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}$ gilt: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 50

a) Finde ein Komplement zu $U := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

b) Sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und

$$W := \{f \in V \mid f(z) = 0 \text{ für alle ganzen Zahlen } z \text{ zwischen } -5{,}1 \text{ und } 5{,}1\} \subseteq V.$$

Zeige, dass W ein Untervektorraum von V ist und finde ein Komplement von W in V.

Aufgabe 51
Sei $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\mathrm{Kern}\, f^2 = \mathrm{Kern}\, f$. Zeige:

a) $V = \mathrm{Kern}\, f \oplus \mathrm{Bild}\, f$.

b) Es existiert eine Basis von V, bezüglich der die Matrix von f folgende Blockgestalt hat: $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$, d.h. es existiert ein $k \in \{0, 1, \ldots, \dim V\}$ mit $a_{ij} = 0$ für $i \leq k$ oder $j \leq k$.

Aufgabe 52
Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $n := \dim_K V$ und $m := \dim_K W$. Wie in der Vorlesung bezeichne $\mathcal{L}(V, W)$ den Vektorraum der linearen Abbildungen $f : V \to W$.

a) Zeige, dass die Vektorräume $\mathcal{L}(V, W)$ und $K^{m \times n}$ isomorph sind.

b) Bestimme $\dim_K \mathcal{L}(V, W)$ und gib eine Basis von $\mathcal{L}(V, W)$ an.

Hinweis: Wie kann man einer linearen Abbildung eine Matrix zuordnen ??