Prof. Dr. Rudolf Scharlau WS 2005/06
Dr. Frank Bowert

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Diplom)
Übungsblatt 14

Abgabe bis Di, den 07.02.06, 18:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 53
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Seien $U, U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume.

a) Zeige $(U^\perp)^\perp = U$.

b) Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$,

(ii) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

Aufgabe 54

a) Zeige, dass $\beta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_3y_4 + 2x_4y_3 + 5x_4y_4$$

ein Skalarprodukt ist.

b) Sei $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$. Berechne mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens die zu $\mathcal{E}$ gehörende Orthonormalbasis bezüglich des in a) definierten Skalarproduktes β.

Aufgabe 55
Betrachte den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und den von folgenden Vektoren aufgespannten Untervektorraum $U := \mathrm{Lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Bestimme eine ON-Basis von U und vom orthogonalen Komplement $U^\perp$.

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Bitte wenden.)

Aufgabe 56

Betrachte wieder den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und den Untervektorraum $U := \mathrm{Lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ mit den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aus Aufgabe 55 a).

a) Laut Vorlesung gilt $V = U \oplus U^\perp$. Schreibe die folgenden Vektoren $\vec{x}$ in der Form $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, wobei $\vec{x}_1 \in U$ und $\vec{x}_2 \in U^\perp$:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} := \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} := \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

.

b) Bestimme jeweils die Orthogonalprojektion von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ auf U.