Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)
Übungsblatt 2

Abgabe bis Mi den 02.11.05, 10:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 5 (Anzahlen von Abbildungen)
Zu endlichen Mengen M und N betrachten wir

$$\mathrm{Abb}(M, N) = \{f : M \longrightarrow N\},$$

die Menge aller Abbildungen von M nach N.

a) Man schreibe $\mathrm{Abb}(M, N)$ für $M = \{a, b\}$ und die drei Fälle $N = \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$ komplett auf.

b) Man bestimme allgemein die Kardinalität von $\mathrm{Abb}(M, N)$.

c) Was ändert sich, wenn wir nur injektive Abbildungen betrachten?

Aufgabe 6 (Urbilder und Bilder von Teilmengen)
Es seien $A, B \subseteq X$ und $U, V \subseteq Y$ Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Bestimme für $X = \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(A) = |A|$ die Mengen $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\emptyset)$ und $f^{-1}(\{0, 2\})$.

b) Zeige allgemein $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ und
$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.

c) Zeige $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für die Bilder von Teilmengen $A, B \subseteq X$.

d) Was ist mit $f(A \cap B)$ im Vergleich zu $f(A) \cap f(B)$?

Aufgabe 7 (Rechenaufgabe zum Lemma von Bezout)
Es sei $g = \mathrm{ggT}(a, b)$ der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen a, b. Berechne mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, für die gilt $xa + yb = g$.

$$i)\ a = 135;\ b = 95 \quad ii)\ a = 136;\ b = 95 \quad iii)\ a = 136;\ b = 96$$

Aufgabe 8
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremde ganze Zahlen. Zeige, dass die Gleichung

$$x \cdot a^2 + y \cdot b = a - 1$$

eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ hat.

Hinweis: Lemma von Bezout.