Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)

## Übungsblatt 4

Abgabe bis Di den 15.11.05, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

**Aufgabe 13**

a) Man schreibe für $m = 7$ und $m = 8$ die Verknüpfungstafeln für $+_m$ und $\cdot_m$ auf der Menge $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ auf.

b) Man begründe, dass $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ zusammen mit der Multiplikation $\cdot_7$ eine Gruppe ist. (Das Assoziativgesetz braucht nicht bewiesen zu werden.)

**Aufgabe 14**
Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeige folgendes:

a) Zu je zwei Elementen $a, b \in G$ besitzen die Gleichungen

$$a * x = b \text{ und } y * a = b$$

jeweils eine eindeutige Lösung $x \in G$ bzw. $y \in G$.

b) In jeder Zeile der Gruppentafel von $(G, *)$ steht eine Permutation der Elemente von $G$. (Hier sollte $G$ endlich sein.)

Überprüfe die zweite Aussage an den Beispielen aus den Aufgaben 11 und 13 sowie den aus der Vorlesung bekannten Beispielen.

**Aufgabe 15**

a) Berechne die multiplikativen Inversen der Zahlen $25, 31, 33$ und $37$ in $\mathbb{Z}_{42}$.

b) Bestimme die Einheitengruppe in $\mathbb{Z}_{12}$.

**Aufgabe 16**

a) Zeige, dass das in der Vorlesung erwähnte Beispiel $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist.

b) Zeige das entsprechende für $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$. Gilt für diesen Ring noch eine stärkere Aussage ?
(Tipp: welche Elemente sind invertierbar ?)