Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)

Übungsblatt 5

Abgabe bis Di den 22.11.05, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 17

a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen. Zeige, dass dann auch $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe ist.

b) Gilt eine analoge Aussage auch für Ringe? Das heißt, ist $U_1 \cap U_2$ ein Unterring, wenn $U_1, U_2 \subseteq R$ Unterringe von $(R, +, \cdot)$ sind?

Aufgabe 18

Bestimme explizit alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ und $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

Aufgabe 19

Eine Äquivelenzrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Doch eine beliebige Relation muss nicht alle diese Eigenschaften erfüllen. Finde jeweils ein Beispiel für eine Relation die

- genau eine bzw.
- genau zwei

dieser Eigenschaften hat. Betrachte alle Möglichkeiten.

Aufgabe 20

Betrachte auf $\mathbb{R}^2$ die folgenden beiden Relationen. Handelt es sich um Äquivalenzrelationen? Falls ja, gib ein Repräsentantensystem an und skizziere die Äquivalenzklassen.

a)
$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \;:\Leftrightarrow\; \exists\, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ mit } (y_1, y_2) = (rx_1, rx_2)\,.$$

b)
$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \;:\Leftrightarrow\; \exists\, r \in \mathbb{R} \text{ mit } (x_1 - y_1, x_2 - y_2) = (2r, r)\,.$$

Es ist hilfreich, sich die Elemente von $\mathbb{R}^2$ als Punkte der Ebene vorzustellen.