

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)
Übungsblatt 6

Abgabe bis Di den 29.11.05, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 21

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass man dann durch $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ eine Äquivalenzrelation auf M erhält. Wie sehen bei den folgenden Beispielen die Äquivalenzklassen aus? Gib jeweils auch ein Repräsentantensystem an.

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2,$
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^2,$
- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x_1^2 + x_2^2,$
- d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x_1 - 2x_2.$

Aufgabe 22

- a) Zeige die Isomorphie der Gruppen \mathbb{Z}_m^* und $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
- b) Ist die Gruppe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ isomorph zu einer der Gruppen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$?
- c) Die gleiche Frage für die Gruppe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*$.

Aufgabe 23

Ein Problem, welches bei Restklassen (bzw. allgemein bei Äquivalenzklassen) auftaucht, ist das der Wohldefiniertheit von Abbildungen. Dazu ein Beispiel.

Handelt es sich bei

- $\varphi_1 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, ([k]_2, [l]_3) \mapsto [3k + l]_6$ und
- $\varphi_2 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, ([k]_2, [l]_3) \mapsto [3k + 2l]_6$

um Gruppenisomorphismen?

(Tipp: Versuche die Abbildung explizit als Zuordnungstabelle aufzustellen.)

Aufgabe 24

Sei M eine Menge und K ein Körper. Wir betrachten den Vektorraum $\text{Abb}(M, K)$ der Abbildungen von M nach K .

Wähle ein $m_0 \in M$ und betrachte $U := \{f \in \text{Abb}(M, K) \mid f(m_0) = 0\}$. Zeige, dass U ein Untervektorraum von $\text{Abb}(M, K)$ ist.

Bitte wenden.

Das griechische Alphabet:

Alpha	α	A	Jota	ι	I	Rho	ρ	P
Beta	β	B	Kappa	κ	K	Sigma	σ	Σ
Gamma	γ	Γ	Lambda	λ	Λ	Tau	τ	T
Delta	δ	Δ	My	μ	M	Ypsilon	υ	Y
Epsilon	ε	E	Ny	ν	N	Phi	φ	Φ
Zeta	ζ	Z	Xi	ξ	Ξ	Chi	χ	X
Eta	η	H	Omikron	o	O	Psi	ψ	Ψ
Theta	ϑ	Θ	Pi	π	Π	Omega	ω	Ω