Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)

Übungsblatt 7

Abgabe bis Di den 06.12.05, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 25

a) Zeige, dass jeder Untervektorraum U eines K-Vektorraumes V eine Untergruppe von $(V, +)$ ist.

b) Es sei K ein Körper und V eine Menge mit zwei Verknüpfungen wie in der Definition eines Vektorraumes, für die die Axiome (V1) bis (V3) und (V5) bis (V8) gelten.

   Zeige, dass dann auch (V4) gilt (Existenz von Inversen bzgl $+$).

Das Vektorraumaxiom (V4) könnte man in der Definition also weglassen.

Aufgabe 26
Handelt es sich bei folgenden Mengen um Untervektorräume von V?

a) $V = \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \\ U_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\} \end{aligned}$$

b) $V = \mathbb{F}_2^3$, wobei $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (also $\mathbb{F}_2^3 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$):

$$\begin{aligned} U_4 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_2^3 \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\} \\ U_5 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_2^3 \mid x_1 + x_1 x_2 + x_3 = 0\} \end{aligned}$$

c) $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$U_6 = \{f \in V \mid f(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$$

Bitte wenden.

Aufgabe 27
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ die Menge $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist. Im folgenden betrachten wir diese Situation im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$.

a) Sei $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Lässt sich U in der Form $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ für geeignete $v, w \in \mathbb{R}^3$ schreiben?

b) Sei nun $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. Und hier? Lässt sich W auch in der Form $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ für geeignete $v, w \in \mathbb{R}^4$ schreiben? Oder gibt es eine andere Darstellung?

Aufgabe 28
Löse folgende linearen Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 17 \\ -7x_1 & + & 14x_2 & = & 3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 3 \\ 1x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

c)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1]_5 & [2]_5 & [2]_5 & [1]_5 \\ [2]_5 & [0]_5 & [1]_5 & [2]_5 \\ [4]_5 & [3]_5 & [1]_5 & [3]_5 \\ [3]_5 & [0]_5 & [2]_5 & [2]_5 \end{array}\right)$$

d)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} [1]_3 & [2]_3 & [2]_3 & [1]_3 \\ [2]_3 & [0]_3 & [2]_3 & [1]_3 \\ [1]_3 & [0]_3 & [1]_3 & [2]_3 \\ [0]_3 & [1]_3 & [2]_3 & [1]_3 \end{array}\right)$$

Bei a) und b) sollen die Lösungen in $\mathbb{R}$ gesucht werden, bei c) in $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und bei d) in $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Um bei c) und d) ein „Klammerchaos" zu vermeiden, benutze die abkürzende Schreibweise $\overline{x}$ anstelle von $[x]_3$ bzw. $[x]_5$, also z.B. $\overline{4} = [4]_5$ bei c) und $\overline{2} = [2]_3$ bei d).
(Bei c) und d) wurde außerdem die Kurzschreibweise für Gleichungssysteme verwendet.)