Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)
Übungsblatt 8

Abgabe bis Di den 13.12.05, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 29
Sei $M := \{a, b\}$ und $\mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ der Körper mit drei Elementen.

a) Gib den Vektorraum $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{F}_3)$ explizit an, indem du seine Elemente aufzählst.

b) Untersuche die Vektoren f_1, f_2 und f_3 auf lineare Unabhängigkeit, wobei die Abbildungen wie folgt gegeben sind:

$$\begin{array}{rcl} f_1(a) & = & \overline{1} \\ f_1(b) & = & \overline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2(a) & = & \overline{2} \\ f_2(b) & = & \overline{1} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_3(a) & = & \overline{1} \\ f_3(b) & = & \overline{1} \end{array}.$$

c) Gib eine Basis von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{F}_3)$ an.

Aufgabe 30
Betrachte im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die davon aufgespannten Unterräume $U := \mathrm{Lin}\{u_1, u_2, u_3\}$ und $V := \mathrm{Lin}\{v_1, v_2\}$.
Bestimme den Unterraum $U \cap V$.
Zusatzfrage: Welche Dimension haben U, V und $U \cap V$?

Aufgabe 31

a) Gib 5 Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an, die paarweise linear unabhängig sind. (D.h. je zwei Vektoren v_1 und v_2 sind linear unabhängig.) Können diese Vektoren auch insgesamt linear unabhängig sein?
An der Zahl 5 ist übrigens nichts besonderes. Wie könnte ein System von n Vektoren mit diesen Eigenschaften aussehen? Wie eines mit unendlich vielen?

b) Gib nun 4 linear abhängige Vektoren des $\mathbb{R}^4$ an, von denen jeweils 3 linear unabhängig sind.

Bitte wenden.

Aufgabe 32
Sei V ein K-Vektorraum und $M_1, M_2 \subseteq V$ Teilmengen. Zeige

a) $\mathrm{Lin}\{M_1 \cap M_2\} \subseteq \mathrm{Lin}\{M_1\} \cap \mathrm{Lin}\{M_2\}$ und

b) $\mathrm{Lin}\{M_1 \cup M_2\} \supseteq \mathrm{Lin}\{M_1\} \cup \mathrm{Lin}\{M_2\}$.

Gilt vielleicht sogar Gleichheit? Falls nicht, gib ein Gegenbeispiel an.