Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)

Übungsblatt 9

Abgabe bis Di den 03.01.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 33
Untersuche folgende Vektorsysteme des $\mathbb{R}^3$ auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 34
Tausche zwei Vektoren der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ gegen die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus, so dass man wieder eine Basis des $\mathbb{R}^4$ erhält.

Aufgabe 35
Sei V ein K-Vektorraum und $(a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V.
Ist dann auch $(a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1)$ eine Basis von V?
(Vorsicht! Die Antwort hängt nicht nur von n ab, sondern auch von K. Wer das Problem bezüglich K nicht sieht, beantworte die Frage für $K = \mathbb{R}$.)

Aufgabe 36
Zu einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichne $\mathrm{Pol}(I, \mathbb{R})$ den Vektorraum aller Polynomfunktionen auf I und $\mathrm{Pol}_n(I, \mathbb{R})$ den Unterraum aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$.

a) Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Pol}(I, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$f_1(x) := x^2, \quad f_2(x) := 2x + 1, \quad f_3(x) := x^2 - 1$$

für alle $x \in I$. Prüfe, ob f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind.

b) Gib eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(I, \mathbb{R})$ an.

Hinweis zu b): Überlege dir zunächst, welche ganz speziellen (und einfachen) Polynome sich für eine Basis anbieten.
Dann darf benutzt werden, dass ein reelles Polynom, das nicht das Nullpolynom ist, höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat. Dabei soll n der Grad des Polynoms sein.