Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)

Übungsblatt 10

Abgabe bis Di den 10.01.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 37

Für $c \in \mathbb{R}$ sei M_c die Menge aller reellen 3×3-Matrizen $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, dass alle Zeilensummen, Spaltensummen und Diagonalsummen in X gleich c sind. Die Elemente in $M := \bigcup_{c\in\mathbb{R}} M_c$ heißen *magische Quadrate*.

a) Zeige, dass M ein Untervektorraum des Vektroraumes $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist. Zeige weiter, dass $M_c \neq \emptyset$ ist für alle $c \in \mathbb{R}$. Bestimme alle $c \in \mathbb{R}$ für die M_c ein Untervektorraum ist.

b) Zeige, dass für alle $X \in M_c$ die Gleichung $c = 3x_5$ gilt. Was folgt hieraus speziell für die Gestalt der X aus M_0?

c) Ergänze das folgende magische Quadrat:

2	9	4

.

d) Zeige, dass $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von M_0 bilden. Ergänze diese Basis zu einer Basis von M.

Aufgabe 38

Die Matrizen A, B und C mit Elementen aus $\mathbb{R}$ seinen definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne, soweit möglich, die folgenden Matrizenausdrücke:

a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2$ und C^2,

b) C^{100},

c) $A(BA - C)$ und $ACB + ABC$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 39
Untersuche, ob folgende Abbildungen linear sind. Falls möglich gib eine Matrix A an, so dass sich F in der Form $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ schreiben lässt.

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_3 - 2x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$,

c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^3 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$,

d) $F : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^3$ mit $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^3 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$,

e) $F : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $F(\varphi) = \varphi(1)$.

Aufgabe 40
Sei $\mathrm{Pol}_2([-1,1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ vom Grad ≤ 2. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathrm{Pol}_2([-1,1], \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \ . \\ f &\longmapsto \int_{-1}^{1} f(t)dt \end{aligned}$$

a) Zeige: L ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

b) Besimme eine Basis von $\mathrm{Kern}(L)$.