Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)

Übungsblatt 11

Abgabe bis Di den 17.01.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 41
Was hälst du von folgenden „Rechenregeln“ für $n \times n$-Matrizen? Beweise oder widerlege sie.

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b) $A^2 + B^2 = 0 \implies A = B = 0$;

c) $AB = 0 \implies BA = 0$;

d) $BA = 0 \implies (AB)^2 = 0$.

Aufgabe 42
Sei $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & \alpha \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimme eine Basis von $\mathrm{Kern}(F_A)$ und $\mathrm{Bild}(F_A)$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe 43

a) Berechne die inverse Matrix A^{-1} von

$$A := \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{4} & \overline{4} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$$

b) Löse möglichst kurz die zwei linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}_1$ und $A\vec{x} = \vec{b}_2$, wobei

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen hier wie schon früher die Abkürzung $\overline{a} := [a]_5$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 44

a) Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen und seien $v_1, \dots, v_k \in V$. Zeige, dass gilt

$$F(\mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}) = \mathrm{Lin}\{F(v_1), \dots, F(v_k)\}.$$

b) Sei $A \in K^{m \times n}$ eine $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform. Also $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ und es existieren Indices $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ mit $a_{ik_i} = 1$ und $a_{ij} = 0$ für $j < k_i$ oder $i > r$ (siehe Skript). Mache dir zunächst klar, wie solch eine Matrix aussieht. Zeige dann, dass die ersten r Zeilen der Matrix $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r$ eine Basis des Zeilenraumes von A bilden.