Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)

Übungsblatt 12

Abgabe bis Di den 24.01.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 45

Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \qquad F(\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}, \qquad F(\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix},$$

so dass

a) F ein Isomorphismus ist?

b) F kein Isomorphismus ist?

Aufgabe 46

Es seien $a_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\3\end{pmatrix}$ und $W := \mathrm{Lin}\{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\}$.

a) Gib eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ an mit $\mathrm{Kern}(F) = W$ und $\mathrm{Bild}(F) = \mathrm{Lin}\{a_1, a_2\}$

b) Ist F eindeutig bestimmt?

Aufgabe 47

Sei $M := \{a, b, c\}$ und $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Körper mit fünf Elementen.

a) Zeige, dass das Vektorsystem $\mathcal{A} := (f_1, f_2, f_3)$ eine Basis von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{F}_5)$ bildet. Dabei gelte

$$\begin{array}{lcl} f_1(a) &=& \overline{1} \\ f_1(b) &=& \overline{0} \\ f_1(c) &=& \overline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} f_2(a) &=& \overline{1} \\ f_2(b) &=& \overline{1} \\ f_2(c) &=& \overline{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} f_3(a) &=& \overline{1} \\ f_3(b) &=& \overline{1} \\ f_3(c) &=& \overline{1} \end{array}.$$

b) Sei $g \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{F}_5)$ gegeben durch

$$\begin{array}{lcl} g(a) &=& \overline{1} \\ g(b) &=& \overline{0} \\ g(c) &=& \overline{3} \end{array}.$$

Gib den Koordinatenvektor $\vec{x} \in \mathbb{F}_5^3$ von g bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ an.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 48

Sei $V := \mathrm{Pol}_n([-1,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ vom Grad $\leq n$ mit Basis $\mathcal{A} = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$. Betrachte die lineare Abbildung L, die jedem Polynom f seine Ableitung f' zuordnet, also

$$\begin{array}{rcl} L : V & \to & V \\ f & \mapsto & f' \end{array}.$$

Bestimme die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(L)$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.