Prof. Dr. Rudolf Scharlau
Sebastian Sauer

WS 2005/06

Lineare Algebra und analytische Geometrie I (Lehramt)
Übungsblatt 13

Abgabe bis Di den 31.01.06, 16:00 Uhr, in die Kästen im Mathefoyer.

Aufgabe 49

Es seien $\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathcal{A} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a})$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$.
Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, die durch $\vec{e}_1 \mapsto \vec{b}_1,\ \vec{e}_2 \mapsto \vec{b}_2$ und $\vec{a} \mapsto \vec{0}$ gegeben ist (siehe Satz 2.6.10).

a) Bestimme die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)$.

b) Seien $\mathcal{E}_3 := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ und $\mathcal{E}_4 := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ die Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$. Bestimme die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_4}(F)$.

c) Nach Satz 2.4.9 existiert eine eindeutig bestimmte Matrix A, so dass gilt $F(\vec{x}) = A\vec{x}$. Wie lautet A hier?

Aufgabe 50

Sei $\mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynomfunktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ vom Grad ≤ 2. Wähle $\mathcal{A} = (v_0, v_1, v_2)$, wobei $v_i(x) = x^i\ \ \forall x \in [-1,1]$, als Basis von $\mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R})$. Als Basis von $\mathbb{R}$ sei $\mathcal{E} = \{1\}$ gegeben. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} L : \mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\ . \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt \end{array}$$

(siehe Aufgabe 40)

a) Bestimme die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}}(L)$.

b) Gib eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{Pol}_2([-1,1],\mathbb{R})$ an, so dass für die Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{E}$ gilt: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Bitte wenden.)

Aufgabe 51
Seien U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume und $F : U \to V$ und $G : V \to W$ lineare Abbildungen. Beweise folgende Ungleichungen:

a) $\text{rang}(G \circ F) \leq \min\{\text{rang}(F), \text{rang}(G)\}$,

b) $\text{rang}(F) + \text{rang}(G) - \dim(V) \leq \text{rang}(G \circ F)$.

(Es ist hilfreich, die Einschränkung von G auf $\text{Bild}(F)$ zu betrachten. Auch die Dimensionsformel ist sehr nützlich.)

Aufgabe 52
Man arbeite das Unterkapitel 2.7. *Weitere Dimensionsätze* des Skriptes vollständig durch und fertige eine Zusammenfassung von nicht mehr als einer 2/3-Seite an. Dabei sollte man auf folgendes eingehen:

- Welches sind die neuen Begriffe dieses Abschnittes ?
- Welches sind die wichtigsten Resultate ?
- Welche Beweisideen und -methoden (frühere Resultate) werden verwendet?