Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Turek

21.10.2005

1. Aufgabenblatt zur Numerik 1

Abgabe: 26.10.2005, 18.00 Uhr in die Kästen im Foyer

Landau-Symbole:
Für Funktionen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bedeutet

$$g(x) = \mathbf{O}\left(h(x)\right) \qquad \text{für } x \to 0\ ,$$

dass es ein $x_0 > 0$ und ein $C > 0$ derart gibt, dass $|g(x)| \leq C \cdot |h(x)|$ für $0 < x < x_0$ gilt. Entsprechend bedeutet

$$g(x) = \mathbf{o}\left(h(x)\right) \qquad \text{für } x \to 0\ ,$$

dass es ein $x_0 > 0$ und eine Funktion $c : (0, x_0) \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to 0} c(x) = 0$ derart gibt, dass $|g(x)| \leq c(x) \cdot |h(x)|$ für $0 < x < x_0$ gilt.

Die Definitionen der Landau-Symbole für $x \to \infty$ sind völlig analog.

Aufgabe 1 (Konvergenzgeschwindigkeit in der „h^α-Skala“)
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathbf{O}\left(h^\alpha\right)$ und $f(h) = \mathbf{o}\left(h^\beta\right)$ für $h \to 0$ mit möglichst großen[1] $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. in der Form $g(n) = \mathbf{O}\left(n^\gamma\right)$ und $g(n) = \mathbf{o}\left(n^\delta\right)$ für $n \to \infty$ mit möglichst kleinen[2] $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

a) $f(h) = 5\left(h^2 + h\right)^2 + 3h^3$

b) $f(h) = \cos h - 1 + h^2/2$

c) $f(h) = \sin x + \dfrac{\sin(x+h) - 2\sin x + \sin(x-h)}{h^2}\ ,\ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ :\ k \in \mathbb{Z}\}$

d) $f(h) = (\ln h)^{-1}$

e) $g(n) = n^{3/2} - n \cdot \left(1 - \sqrt{n}\right)^2$

f) $g(n) = \ln n + n^{1/3}$

g) $g(n) = n \cdot e^{-3\ln n}$

h) $g(n) = \ln\left(1 + 2^{n^2}\right)$

Aufgabe 2 (Asymptotische Beziehungen)
Es seien $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder Widerlegen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \mathbf{O}\left(n^3\right)$ für $n \to \infty$

b) $f(x) = \mathbf{O}\left(x\right)$ für $x \to 0 \iff f(x) = \mathbf{o}\left(1\right)$ für $x \to 0$

c) $f(x) = \mathbf{O}\left(1/\sqrt{x}\right), g(x) = \mathbf{O}\left(1/\ln x\right), h(x) = \mathbf{O}\left(1/x\right)$ für $x \to \infty$
$\Longrightarrow f(x) + g(x) + h(x) = \mathbf{O}\left(1/x\right)$ für $x \to \infty$

[1] Vorsicht: In einigen Fällen existiert kein größtes β.
[2] Vorsicht: In einigen Fällen existiert kein kleinstes δ.

Aufgabe 3 (Zusammenhang der Asymptotik einer Funktion zu Integralen und Ableitungen)

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen oder Widerlegen Sie:

a) Ist f stetig und gilt $f(x) = \mathbf{O}\left(x^{-1/2}\right)$ für $x \to 0$, so existiert $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Ist f stetig und gilt $f(x) = \mathbf{O}\left(x^{-1/2}\right)$ für $x \to \infty$, so existiert $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

c) Ist g auf $\mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar $(n \in \mathbb{N})$ und gilt $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n)}(0) = 0$, so folgt $g(x) = \mathbf{O}\left(x^{n+1}\right)$ für $x \to 0$.

d) Ist g auf $\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar $(n \in \mathbb{N})$ und gilt $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n)}(0) = 0$, so folgt $g(x) = \mathbf{o}\left(x^n\right)$ für $x \to 0$.

Hinweis zu c) und d): Taylorformel

Aufgabe 4 (Laufzeitanalyse eines Algorithmus)

Zur approximativen Lösung eines Gleichungssystems mit n Unbekannten wird ein Verfahren verwendet, das in jedem Rechenschritt den Fehler der Näherung um den Faktor $(1 - 1/n)$ verkleinert. Der Anfangsfehler $r_0 > 0$ sei unabhängig von der Zahl der Unbekannten. Weiter benötige jeder Rechenschritt $\mathbf{O}\left(n^2\right)$ arithmetische Operationen für $n \to \infty$.

a) Beweisen Sie, dass für die Anzahl $A(n)$ der arithmetischen Operationen, die notwendig sind, um den Fehler unter eine vorgegebene Schranke $r_0 > \varepsilon > 0$ zu drücken,

$$A(n) = \mathbf{O}\left(n^3\right) \qquad \text{für } n \to \infty$$

gilt.

b) Es gelte die zusätzliche Vorraussetzung, dass für die Anzahl der arithmetischen Operationen $P(n)$ pro Rechenschritt $P(n) > Cn^2$ mit einer Konstanten $C > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass das Ergebnis aus a) im folgenden Sinne optimal ist: Es gibt Konstanten $C_1,\ C_2 > 0$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$C_1 \cdot n^3 < A(n) < C_2 \cdot n^3$$

gilt.

 stefan.turek@math.uni-dortmund.de